

PARTICULARITĂȚI ALE APTITUDINILOR MATEMATICE LA ȘCOLARI

Ioan Berar

Institutul de Istorie „George Bariț” din Cluj-Napoca

Primele încercări de abordare a problemei aptitudinilor matematice se leagă de numele unor cunoscuți psihologi și matematicieni, care au trăit și și-au făcut cunoscute ideile în prima jumătate a secolului trecut: A. Binet, E. L. Thorndike, A. Ruthe, A. L. Rogers, A. F. Lazurski, respectiv, H. Poincaré, D. M. Boltovski, J. Hadamard ș.a. Date interesante au fost obținute în cadrul cercetărilor bazate pe analiza factorială a rezultatelor la testele de inteligență și la cele cu conținut matematic: C. Spearman, L. L. Thurstone, J. P. Guilford, M. Bejat și A. Perju etc. În spiritul teoriei promovate de S.R. Rubinstein¹ cu privire la natura proceselor cognitive, rețin atenția, prin originalitatea ipotezelor de lucru adoptate și prin metodele de verificare utilizate, cercetările efectuate de autori ca: R. Gullasch, G. Pippig, N. A. Mencinskaia și M. I. Moro. Teoria formării operațiilor mintale ca rezultat al interiorizării acțiunilor externe² a constituit fundamentul unor ample și rodnice cercetări privitoare la structura și dinamica aptitudinilor matematice la școlari: K. Lowell, V. V. Davâdov, Z. P. Dienes, B. Zörgö ș.a.³

Abordând problema structurilor psihice dintr-o perspectivă fondată pe principii și metode proprii teoriei sistemelor și ciberneticii, V. A. Krutețki reliefează câțiva factori cu rol esențial în configurarea aptitudinilor matematice la școlari. Primul dintre aceștia a fost denumit capacitate de percepere formalizată (*formalizovannoe vospriiatie*) a materialului matematic, o însușire complexă care se manifestă prin: recunoașterea imediată a datelor și condițiilor problemei, înțelegerea relativ rapidă a structurii formale a acesteia, conștientizarea relațiilor esențiale dintre indicatori și nerecurgerea la date puțin semnificative sau de prisos.

¹ S. R. Rubinstein, *Problemi obșcei psihologii*, Moskva, Izd-vo Pedagoghika, 1973.

² Teorie inițiată de P. Janet, continuată de J. Piaget și dezvoltată de P. I. Galperin, în *Psihologhiia mășleniia i ucenie o poetapnom formirovanii umstvennâh deistvii*, „Issledovaniia mășleniia v sovetskoi psihologii”, Moskva, Izd-vo Nauka, 1966.

³ I. Berar, *Aptitudinea matematică la școlari*, București, Edit. Academiei Române, 1991, p. 16-20.

Urmează, apoi, o serie de factori implicați în activitatea de procesare a informațiilor matematice: capacitatea de generalizare imediată și de amplexare a datelor, flexibilitatea proceselor gândirii, străduința spre claritate și economicitate și, în fine, reversibilitatea proceselor gândirii. Ultimul factor evidențiat se referă la păstrarea informației matematice și constă în: reținerea esențialului (scheme de acțiune, structuri de bază, principii generale de rezolvare) și „uitarea” datelor concrete, a informației de prisos din problema dată⁴.

Formându-se și dezvoltându-se în activitatea de învățare a matematicii, aptitudinea la care ne referim acum are darul de a facilita însușirea unui anumit volum de cunoștințe, priceperi și deprinderi specifice și, totodată, de a orienta într-o anumită direcție curiozitatea epistemică firească a copilului, de a-l face să îndrăgească lumea aparent rece și abstractă a obiectelor și relațiilor cantitative și spațiale. Ajunsă la un nivel superior de dezvoltare, aptitudinea matematică conferă o înaltă eficacitate activității de învățare și utilizare a matematicii. Sarcina asumată în cadrul cercetării noastre a fost de a reliefa factorii care structurează aptitudinea matematică la școlari, adică de a evidenția și explica acele însușiri psihice ale elevilor care, în condiții egale de efort și oportunități educative, duc la rezultate diferite în activitățile cu conținut matematic.

Ipoteza de lucru de la care am plecat își are originea atât în rezultatele unor cercetări anterioare^{5, 6, 7}, cât și în datele obținute cu ocazia unor investigații personale⁸. Am ajuns, astfel, la presupunerea că *aptitudinea matematică reprezintă o structură relativ unitară și distinctă, constituită din mai mulți factori specifici, a căror pondere variază în funcție de conținutul sarcinii și etapele de rezolvare a acesteia*.

Pentru verificarea ipotezei de lucru adoptate am recurs la două categorii de probe: normative (teste de aptitudini și cunoștințe matematice) și formative. Fiind o măsură obiectivă și standardizată, testul reușește să ofere informații despre diferențele individuale dintre subiecți, inclusiv despre particularitățile psihice ale acestora în procesul de rezolvare a unor probleme cu conținut matematic. Pe scurt, probele normative utilizate au fost⁹: 1. *Serii de numere*, 2. *Probleme*, 3. *Figuri plane*, 4. *Rotire cuburi*, 5. *Test de cunoștințe matematice*, 6. *Numărare figuri geometrice*, 7. *Memorare numere*, 8. *Numărare cuburi*, 9. *Matricile progresive Raven* (seriile A, B, C, D, E), 10. *Atenție concentrată*.

⁴ V. A. Krutetskii, *Psihologhiia matematicheskikh sposobnostei shkolnikov*, Moskva, Izd-vo Prosveshchenie, 1968, p. 385.

⁵ R. Gullasch, *Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten*, Berlin, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1971.

⁶ V. A. Krutetskii, *op. cit.*

⁷ Al. Roșca, B. Zörgö, *Aptitudinile*, București, Edit. Științifică, 1972.

⁸ I. Berar, *Cunoașterea și cultivarea aptitudinilor matematice la elevii de vârstă școlară mică și mijlocie*, în: B. Zörgö și I. Radu (coord.), *Studii de psihologie școlară*, București, Edit. Didactică și Pedagogică, 1979.

⁹ Probele sunt prezentate în: I. Berar, *op. cit.*, p. 162-182.

Datele obținute cu ajutorul acestor probe – toate aplicate colectiv – au fost întregite cu încă două variabile: notele medii la matematică și, respectiv, la fizică. Relațiile strânse dintre aptitudini și cunoștințe justifică o asemenea procedură. În plus, se amplifică baza primară de date pentru realizarea unei cercetări de tip statistic / cantitativ.

Dând curs orientării complementariste, care promovează ideea îmbinării demersului cantitativ cu cel calitativ¹⁰, în cercetarea proprie am coroborat rezultatele analizei cantitative a cotelor la testele de aptitudini matematice cu cele obținute prin probe calitative, de tip formativ.

La baza probelor de tip formativ se află ideea că un anumit nivel de dezvoltare aptitudinală poate fi explicat ca efect al unui ansamblu controlabil de influențe instructive iar diferențele dintre subiecți pot fi puse pe seama receptivității acestora la influențele menționate. O probă diagnostică formativă este o problemă a cărei rezolvare nu depinde direct de setul de cunoștințe, priceperi și deprinderi stocate în memoria subiectului, ci de experiența pe care acesta o câștigă în și prin procesul rezolvării ei¹¹.

Probele formative la care am recurs în cercetarea proprie au fost:

1. *Turnul din Hanoi*, probă utilizată pentru cunoașterea unor caracteristici aptitudinale ca: orientarea în sarcină/problemă, rapiditatea și trăinicia învățării prin încercare și eroare, receptivitatea la ajutor extern, flexibilitatea gândirii, generalizarea unor scheme de rezolvare, interesul și atracția pentru problematic, perseverența în rezolvarea unor sarcini dificile ș.a.
2. *Ghici numărul*, folosită pentru atingerea unor obiective de genul: reliefaarea capacității subiectului de a descoperii independent sau cu ajutor extern gradual regularități și relații esențiale într-un ansamblu de numere date, manifestarea flexibilității gândirii în procesul de rezolvare a unor probleme, receptivitatea la ajutor extern etc.
3. *Balanța fructelor în depozit*, utilizată pentru reliefaarea capacității de orientare adecvată în sarcini cu conținut matematic prezentat în forme/expresii algebrice, geometrice și aritmetice.
4. *Numărare figuri geometrice*, probă care permite cunoașterea unor aspecte aptitudinale nu numai pe baza rezultatelor, ci și a procesualității, adică a strategiilor utilizate, a momentelor de „iluminare” și „rătăcire”, de evitare sau repetare a unor greșeli etc.

Ambele categorii de probe au fost aplicate în două etape diferite, la subiecți cu vârste cuprinse între 14 și 17 ani. Prima aplicare a avut loc în perioada 1980–1982, rezultatele obținute au fost publicate în lucrarea „*Aptitudinea matematică la*

¹⁰ A. Băban, *Metodologia cercetării calitative*, Cluj-Napoca, Edit. Presa Universitară Clujeană. 2002, p. 167-173.

¹¹ I. Berar, *Diagnosticul formativ*, „Anale”, Seria psihologie, Timișoara, 1996, p. 22-31.

școlari”¹². A doua aplicare s-a desfășurat în perioada 2000–2002 la subiecți de aceeași vârstă cronologică. Analiza datelor obținute în a doua etapă a cercetării demonstrează faptul că nu au apărut modificări semnificative în privința particularităților aptitudinale, ceea ce demonstrează stabilitatea în timp a substructurii investigate și, foarte probabil, fidelitatea instrumentelor de lucru utilizate.

Coroborând datele rezultate din cercetarea proprie cu cele existente în literatura de specialitate consultată, putem susține cu suficient temei că ipoteza de lucru a fost pe deplin justificată, că de la o anumită vârstă (14–15 ani) se conturează la elevi – cel puțin la unii dintre ei – o structură psihică complexă, care imprimă un anumit specific și o eficiență sporită activității de învățare a matematicii școlare.

Primul „element” sau prima particularitate se referă la *modul de orientare a elevilor într-o situație problematică dată*. Elevii cu aptitudini matematice superior dezvoltate reușesc să înțeleagă imediat și corect datele oferite, conștientizează completitudinea, insuficiența sau excesivitatea acestora, stabilesc cu relativă ușurință gradul de rezolvabilitate sau indeterminare al problemei, sesizează momentul și natura greșelilor comise, realizează transferuri oportune de cunoștințe și strategii de rezolvare. Aceștia nu se lasă copleșiți de specificul și volumul datelor, fie ele concrete sau abstracte, numerice, literale (algebrice) sau figurale (geometrice); suficiente, lacunare sau de prisos. Ei își fixează de la bun început atenția asupra întrebării sau obiectivului de atins, surprind cu multă exactitate structura de ansamblu a problemei.

Un cu totul alt mod de orientare în problemă se observă la elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate. Aceștia fie că nu rețin toate datele problemei, fie că nu sesizează raporturile logice dintre ele. Rezultatul este, de cele mai multe ori, lipsa de înțelegere a sensului, a ceea ce se cere în finalul activității.

Asemenea deosebiri sunt, foarte probabil, determinate de nivelul diferit de dezvoltare al uneia dintre componentele de bază ale aptitudinii matematice, componentă care ar putea fi exprimată prin termeni ca: simț sau sensibilitatea matematică (prin analogie cu sensibilitatea muzicală, de exemplu), intuiție matematică, orientare matematică a gândirii, capacitatea matematică sau, pur și simplu, factorul 0, asemănător cu factorul N, reliefat de L. L. Thurstone¹³. Dacă admitem că orice aptitudine reprezintă o grupare („cluster”) de abilități¹⁴, atunci factorul 0 ar putea fi denumit *abilitate de orientare adecvată* într-o situație problematică dată.

Abilitatea de orientare adecvată în situații problematice corelează semnificativ ($r = .834$) cu factorul GM denumit de noi gândire matematică, factor

¹² *Ibidem*.

¹³ L. L. Thurstone, *Primary Mental Abilities*, Illinois, Chicago, The University of Chicago Press, 1938.

¹⁴ T. I. Horrocks, Schoonover, *Measurement for Teachers*, Ohio, Columbus, 1968.

care saturează puternic probele „Probleme” și „Test de cunoștințe matematice”¹⁵. Interesant de semnalat este și faptul că abilitatea de orientare în problemă devine o variabilă dependentă de caracteristicile sarcinii: este mai ridicată în probele asemănătoare problemelor matematice școlare (exp. „Balanța fructelor în depozit”) și mai scăzută în probele neuzuale („Turnul din Hanoi”, „Ghici numerele” și „Numărare figuri geometrice”).

Componenta aptitudinală la care ne referim se aseamănă în unele privințe cu factorul denumit de către V. A. Krutetskii ca tendință/faktură matematică a gândirii (*matematicheskaia napravlionnost uma*)¹⁶. Legături are, desigur, și cu ceea ce B. Zörgö denumeste *formularizare generalizată a problemei*¹⁷.

O a doua componentă importantă în structura aptitudinilor matematice o reprezintă *abilitatea de a sesiza, reține și valorifică adecvat* acele date și relații care au atributele de a fi comune și esențiale pentru una sau mai multe categorii de probleme. În cercetarea noastră această însușire s-a manifestat mai ales în cazul rezolvării problemelor formative (aplicate individual). La baza generalizării regulilor și schemelor de rezolvare s-a aflat, foarte probabil, experiența anterioară a subiecților, inclusiv cunoștințele dobândite în chiar procesul de rezolvare a situațiilor – test.

Ceea ce diferențiază profund grupele de elevi comparate este receptivitatea la ajutor extern. Majoritatea subiecților cu aptitudini matematice superior dezvoltate au reușit să rezolve probele aplicate după faza de ajutor minim, aproximativ o treime – după faza de ajutor mediu și doar în cazuri excepționale a fost nevoie de ultima fază, adică de ajutor maxim. Total diferită este situația în cazul elevilor cu aptitudini matematice slab dezvoltate. La aceștia curba receptivității la ajutor extern se inversează, ia valori minime la începutul etapei și maxime la sfârșitul acesteia. Faptul că saltul se produce mai repede și cu relativă ușurință la elevii buni față de cei slabi la matematică își are explicația, probabil, în nivelul actual al dezvoltării lor intelectuale și/sau în specificul „zonei proximei dezvoltări”¹⁸. Tocmai măsura ajutorului de care are nevoie copilul pentru însușirea noilor cunoștințe constituie unul dintre parametrii capacității de învățare și, deci, a abilității intelectuale a cărei componentă este.

Abordând generalizarea ca indicator de bază al analizei și sintezei (alături de abstractizare, revenibilitate și contragere) se constată că aceasta este bună și foarte bună la elevii cu rezultate superioare la matematică și mult deficitară la ceilalți¹⁹.

Abilitatea de a generaliza în sfera obiectelor și relațiilor matematice se regăsește și în modul de rezolvare a probelor normative. Factorul rezultat în urma

¹⁵ I. Berar, *op. cit.*, p. 58-59.

¹⁶ V. A. Krutetskii, *op. cit.*, p. 386.

¹⁷ B. Zörgö, *Formularizarea generalizată a acțiunii în rezolvarea problemelor de aritmetică la școlarul mic*, „Studia Universitatis Babeș-Bolyai”, Series psychologia-paedagogia, Cluj-Napoca, 1962.

¹⁸ L. S. Vâgotski, *Opere psihologice alese*, vol. I-II, București, Edit. Didactică și Pedagogică, 1971.

¹⁹ R. Gullasch, *op. cit.*, p. 78-80.

analizei întreprinse (convențional denumită G) are o contribuție de 14,32% la saturarea bateriei de probe utilizate. Cele mai ridicate corelații le are acest factor cu probele „Șiruri de numere” și „Matricile progresive Raven”, adică tocmai cu acele sarcini care solicitau cu precădere capacitatea/priceperea subiecților de a desprinde din ansamblul de date prezentate, un anumit principiu de organizare.

Abilitatea de a generaliza este o caracteristică a oricărui om normal, dar manifestarea ei în sfera simbolisticii numerice și literale, a relațiilor cantitative și spațiale este un privilegiu al matematicienilor²⁰. Ca însușire psihică specifică gândirii matematicianului, generalizarea nu poate fi înțeleasă în afara contextului dat de experiența anterioară și a motivației pentru sfera obiectelor și relațiilor caracteristice domeniului matematic.

Următoarea *particularitate se referă la modul de percepere și utilizare a conținuturilor imagistice*. Abilitatea de a opera cu substitute ale obiectelor caracterizează gândirea omului în toate manifestările sale, o pondere foarte mare având-o în domeniile de interes ale matematicienilor.

În matricea factorilor oblici calculați de noi, abilitatea de a percepe și opera cu forme, mărimi (întindere, volum, grosime, lungime, lățime, înălțime), poziții, ordine, distanțe etc., are o arie relativ largă de manifestare sau, altfel spus, contribuie semnificativ la saturarea majorității variabilelor / probelor utilizate. Așa de exemplu, cu proba „Figuri plane”, $r = .679$, iar cu „Numărare cuburi”, $r = .679$.

În cazul probelor formative, aspectele care diferențiază pregnant grupele contrastante de elevi sunt date de amploarea schemelor de acțiune folosite în rezolvarea probei „Turnul din Hanoi”, sesizarea caracterului multifuncțional al liniilor din proba „Numărare figuri geometrice” și numărul greșelilor comise.

Abilitatea la care ne referim apare ca esențială și necesară în organizarea și desfășurarea oricărei forme de activitate. Ca proces, aceasta duce la construirea imaginii obiectului în absența sa, la conturarea unui model ideal cu conținut intuitiv, iar ca însușire diferențială a personalității, la performanțe inegale în activitățile caracterizate printr-un grad ridicat de intuitivitate. Împreună cu cuvântul, adesea în „simbioză” cu acesta, reprezentările constituie suportul concret – informațional al cunoașterii și comunicării.

În matricea finală, calculată pe baza datelor obținute ca urmare a aplicării bateriei de probe normative, apare un factor cu o contribuție ridicată (12,184%) la ansamblul saturațiilor factoriale. Acesta saturează semnificativ (.742) proba „Numărare figuri geometrice” și moderat, alte trei probe: „Probleme”, „Numărare cuburi” și „Matricile progresive Raven”. Având în vedere că toate aceste probe vizează cu precădere priceperea subiectului de a stabili asociații logice, inedite între datele problemei, adesea chiar de a le restructura de mai multe ori, apreciem că factorul în discuție nu poate reprezenta altceva decât *flexibilitatea gândirii*. Date relevante privitoare la flexibilitatea proceselor cognitive au fost obținute și cu

²⁰ V. A. Krutetskii, *op. cit.*, p. 289.

ocazia aplicării probelor formative anterior menționate la eșantioane contrastante de subiecți, sub aspectul dezvoltării lor intelective²¹.

Mai mult, poate, decât în cazul altor discipline școlare, asimilarea și utilizarea cunoștințelor matematice se bazează pe experiența anterioară a copilului, pe transferul unor priceperi și scheme de acțiune de care acesta dispune. Cu alte cuvinte, un rol important în învățarea matematicii școlare și, implicit, în dezvoltarea aptitudinilor matematice îl au calitățile mnezice. Ca însușire diferențială a persoanei, memoria trebuie abordată cel puțin sub următoarele două aspecte: a) ca orientare mnezică generală a persoanei și b) ca particularități tipologice, manifestate în fazele de percepere, păstrare și valorificare a informației matematice.

În planul orientării mnezice se constată că elevii cu aptitudini matematice superior dezvoltate se deosebesc de colegii lor mai puțin dotați pentru această disciplină prin: atenția sporită pe care o acordă aspectelor cantitative și spațiale ale realității, interesul și plăcerea față de problematic, amploarea și rapiditatea cu care rețin informațiile vehiculate prin numere, imagini și formule, ușurința cu care stabilesc relații logice între datele unei probleme etc.

Urmărind modul de rezolvare a probelor formative utilizate în cercetarea noastră²², am constatat că aproape toți subiecții cu care am lucrat recurg cu ușurință (poate chiar cu prea mare ușurință) la experiența anterioară, mai ales la structuri de cunoștințe dobândite pe parcursul procesului rezolutiv, fără a sesiza faptul că noua situație problematică numai în aparență este identică cu cea anterioară. Deosebirile dintre grupele de elevi comparate devin evidente în momentele de impas, atunci când conștientizează că au greșit. Elevii cu aptitudini matematice superior dezvoltate caută și de cele mai multe ori găsesc soluția corectă, în timp ce colegii lor mai puțin dotați persistă în eroare, repetă aceleași greșeli (exemplu la „Turnul din Hanoi”).

Valorificarea experienței anterioare este puternic marcată de complexitatea sarcinii. În cazul probelor relativ simple, aproape toți subiecții trec fără ezitări la acțiune, folosind scheme și modalități de rezolvare rutiniere. Cu totul alta este situația în cazul sarcinilor complexe, când elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate nu reușesc să le rezolve decât cu ajutor mediu sau maxim din partea examinatorului. În schimb, subiecții cu aptitudini matematice superior dezvoltate învață masiv din propriile greșeli și nu au nevoie decât rareori de ajutor extern.

Analizând tempoul sau ritmul de avansare în procesul de învățare, am constatat că acesta crește la ambele categorii de subiecți, dar în mod inegal. Avantajul este de partea elevilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate care

²¹ I. Berar, *Flexibilitatea proceselor cognitive ca indicator al supradotării*, în: V. G. Todea (coord.) „Conferința internațională de psihologie (3, 2001, Sinaia)”, Edit. Augusta, Timișoara, 2002, p. 191-196.

²² Probe având caracterul de probleme bine definite. A se vedea și lucrarea M. Miclea, P. Curșeu, *Modele neurocognitive*, Cluj-Napoca, Edit. A.S.C.R., 2003, p. 71-72.

obțin un coeficient de progres de două ori mai ridicat, atât în privința dimensiunii numărului de greșeli, cât și a timpului de lucru necesar pentru rezolvare.

În consecință, se poate afirma cu suficient temei că anumite calități mnezice (rapiditate, volum, structurare logică ș.a.) intră ca „elemente” constitutive în formarea și dezvoltarea aptitudinilor matematice la școlari.

În strânsă legătură cu memoria este factorul numit de noi *experiență logico-matematică*. Acumulată treptat în diverse activități anterioare (joc, comunicare, învățare școlară și extrașcolară), acest tip de experiență joacă un rol important în formularea și rezolvarea de probleme cu conținut matematic.

Ideea de mai sus apare în lucrările multor autori. „Aptitudinea matematică – notează Al. Roșca și B. Zörgö – depinde nu numai de contactul activ cu modelul extern al activității matematice, ci și de anumite condiții interne. Sunt necesare anumite potențialități active primare formate în experiența de toate zilele pe baza modelelor genetice, cum ar fi de exemplu anumite procese ale gândirii, ale memoriei, atenției etc.”²³ Cu alte cuvinte, nu activitățile în sine, nu experiența ca volum de cunoștințe, priceperi și deprinderi intră aici pe prim plan. Ceea ce contează este efectul acestora asupra proceselor psihice implicate în activitatea matematică.

Datele obținute în cercetarea noastră confirmă pe deplin relația dintre nivelul dezvoltării aptitudinale și experiența logico-matematică. Elevii cu aptitudini matematice dezvoltate prezintă, comparativ cu ceilalți, o superioritate evidentă nu numai la probele de cunoștințe matematice, ci și la cele cu conținut mixt (matematic și nematematic). Edificator este și faptul că în faza rezolvărilor independente a probelor formative, când cunoștințele specifice erau încă minime, rezultatele obținute au fost nu numai modeste, dar și puțin diferențioare. Treptat, din confruntarea cu problema dată rezultă un anumit câștig pentru toți elevii, dar acesta pare a fi mai substanțial în cazul primei categorii de mai sus. Diferențele între grupele comparate se amplifică după fiecare fază de ajutor extern, ceea ce semnifică existența unor raporturi de susținere între aptitudinea matematică și experiența logico-matematică a subiecților noștri.

Implicarea experienței anterioare în rezolvarea sarcinilor cu conținut matematic este demonstrată și de valoarea coeficienților de corelație dintre factorul E și unele probe utilizate în cercetare²⁴.

În concluzie, experiența logico-matematică își face simțită prezența în formarea și manifestarea aptitudinilor matematice la școlari, este un puternic stimulent pentru dezvoltarea componentelor: orientarea adecvată în sarcină, flexibilitatea proceselor cognitive și capacitatea de a generaliza.

În cercetarea proprie am agreeat ideea că aptitudinile omului, fie ele generale sau speciale, nu pot fi limitate la structuri psihice cognitive. Ca atare, am emis

²³ Al. Roșca, B. Zörgö, *op. cit.*, p. 25.

²⁴ Factorul E prezintă corelații ridicate cu probele „Nota la matematică” ($r = .904$) și „Nota la fizică” ($r = .872$), în timp ce cu probele neuzuale „Figuri plane” și „Serii de numere” $r = .194$ și, respectiv, $r = .182$.

ipoteza că la formarea și manifestarea aptitudinilor matematice vor fi implicate și componente afective, motivaționale, volitive și chiar temperamentale. Pentru a desemna aceste din urmă componente am recurs la expresia *atracție pentru problematic*. Motivele unei asemenea alegeri sunt: a) în sfera noțiunii de *atracție* intră, în mai mare măsură decât în cazul celor de preferință, interes, tendință sau chiar pasiune, acele „elemente” care joacă cu adevărat rolul de mobiluri interne ale conduitei; b) nu se includ aici motivele conjuncturale ale învățării matematice (de exemplu, lauda, recompensa, personalitatea educatorului etc.); c) expresia îmbină în sine atât valențe motivaționale, cât și afective și, în fine d) expresia a fost folosită și de alți autori, care consideră atracția pentru problematic drept calitate evidentă, îndeosebi în rezolvarea problemelor cu multe și interesante implicații ascunse²⁵.

În cercetarea proprie, atracția pentru problematic a fost investigată prin: a) analiza modului de angajare a subiecților în rezolvarea probelor formative aplicate și b) evidențierea preferințelor elevilor pentru diferite obiecte de studiu.

Prin natura lor și modul de aplicare, toate probele formative au stârnit curiozitatea și interesul participanților, le-au indus acestora încrederea în forțele proprii și chiar dorința de a se afirma într-o competiție oarecum diferită de ceea ce le oferă școala prin programele sale instructive. În această privință diferențele dintre subiecți au fost ne semnificative.

Imaginea se schimbă îndată ce subiecții ajung în situații de impas și mai ales de eșec repetat. Elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate încep să manifeste nesiguranță, apatie, nemulțumire și chiar abandon, în timp ce colegii lor cu aptitudini matematice superior dezvoltate nu par a se descuraja, devin mai hotărâți, dornici de a se confrunta cu necunoscutul, cu problematicul. Niciunul dintre aceștia din urmă nu se declară dezamăgit sau „învins”, nu devine sceptic în privința posibilităților sale de a găsi soluția corectă.

Diferențele dintre grupele comparate în privința atracției pentru problematic se adâncesc după etapa acordării de ajutor extern. Urmărind efectele acestui element nou asupra stării psihice a subiecților am constatat că toți elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate au manifestat o vădită satisfacție pentru sprijinul acordat, în timp ce majoritatea elevilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate au preferat să lucreze în continuare fără indicații din partea examinatorului. Mai mult chiar, aceștia și-au exprimat dorința de a rezolva și alte probe asemănătoare sau chiar mai dificile.

La solicitarea de a indica 2–3 obiecte de studiu preferate, majoritatea subiecților cu aptitudini matematice superior dezvoltate notează „matematica”, „matematica și fizica” sau „matematica și chimia” și doar doi menționează alte discipline. În cazul elevilor cu aptitudini matematice slab dezvoltate, situația apare ca fiind mult mai diversificată. Dintre aceștia din urmă, unul singur menționează matematica și doi – fizica.

²⁵ E. Rusu, *Psihologia activității matematice*, București, Edit. Științifică, 1969, p. 17-26.

În concluzie, atracția pentru problematic poate fi considerată ca o particularitate a elevilor cu aptitudini matematice clar conturate. Între cele două dimensiuni ale personalității există strânse raporturi de interdependență: aptitudinea matematică facilitează achiziția de cunoștințe în domeniu, determină o anumită stare de siguranță și satisfacție, iar acestea, la rândul lor, susțin interesul pentru problematic.

Un anumit rol în structura aptitudinilor matematice la școlari îl au și alte componente psihice cum sunt: capacitatea de a memora și opera cu simboluri; mecanismele de autocontrol și autoreglare; concentrarea atenției; fluiditatea verbală ș.a. Fără a avea valori și ponderi la fel de ridicate ca primele prezentate (orientarea în problemă, generalizarea, flexibilitate, reprezentarea spațială și atracția pentru problematic), acestea din urmă conferă, totuși, structurii psihice de care ne ocupăm un plus de originalitate și eficiență.

Aptitudinile matematice, asemenea altor însușiri diferențiale ale persoanei, nu pot fi cu adevărat cunoscute și eficient valorificate fără a reliefa caracteristicile pe care acestea le prezintă în evoluția lor la copil. „Sarcina psihologiei nu constă în a descoperi eternul infantil, ci istoricul infantil sau, folosind expresia poetică a lui Goethe, am putea spune efemerul infantil”²⁶.

A pune în evidență formele succesive sub care se manifestă aptitudinea matematică la școlari este o operație extrem de dificilă. Există mai multe cauze care generează o astfel de dificultate: diversitatea de opinii cu privire la caracteristicile aptitudinale ale elevilor, în general; dezvoltarea componentelor aptitudinale în funcție de metodele și strategiile utilizate în procesul de învățare a matematicii; proprietatea ca atare a aptitudinii de a evolua în timp nu după o traiectorie prestabilită, ci după un model cibernetic complex și greu de descifrat; eterogenitatea metodelor și instrumentelor de lucru utilizate în cercetare ș.a.

A. MANIFESTAREA APTITUDINILOR MATEMATICE LA ELEVII DE VÂRSTĂ ȘCOLARĂ MICĂ (7-11 ANI)

Este cunoscut faptul că învățătoarele sunt adesea frapate de ușurința și rapiditatea cu care unii dintre elevii lor înțeleg, rețin și operează cu numere și relații cantitative, de rigurozitatea logică a gândirii lor. Mai în glumă, mai în serios aceștia sunt etichetați drept „matematicienii” clasei. Din cazuistica proprie menționez două astfel de cazuri. Elevul D.M., la vârsta de 10 ani, reușește să rezolve corect și cu destulă rapiditate următoarea problemă: „Câți pomi și câte vrăbii există într-o grădină, cunoscând că dacă se așează câte două vrăbii pe un pom, rămâne un pom liber (neocupat), iar dacă se așează câte o vrăbie pe un pom, rămâne una fără pom?” Problema este una dificilă chiar și pentru persoanele adulte care nu stăpânesc metoda rezolvării cu ajutorul ecuațiilor.

²⁶ L. S. Vâgotski, *op. cit.*, p. 62.

V. A. Krutețkii prezintă mai multe cazuri de copii superior dotați în domeniul matematicii. Așa de exemplu, Sonia L. la vârsta de 3 ani știa să numere până la 100, la 4 ani explica fratelui său mai mare cum se scade 14 din 27 (la început se scade 10, se obține 17 și apoi 4 și se obține 13), la 5 ani ajunge la noțiunea de fracție, iar la 5–6 ani avea o anumită intuiție a numerelor negative. La 8 ani avea nivelul unui elev de clasa a VI-a, reușea să rezolve probleme de tipul: Care este lungimea și viteza trenului, dacă el trece pe lângă un stâlp în $1/4$ minute, iar un tren lung de 540 metri îl străbate în 45 secunde?²⁷

Datele cele mai convingătoare sunt, fără îndoială, cele rezultate din cercetări experimentale. Utilizând metoda analizei procesului de rezolvare a unor probe matematice experimentale, I. V. Dubrovina găsește că superioritatea elevilor cu aptitudini reale pentru matematică comparativ cu colegii lor mai puțin dotați constă în:

- Perceperea imediată a datelor și relațiilor dintre acestea, formularea corectă a întrebării.

- Rezolvarea problemelor în formă generalizată, ca tipologie și nu doar ca un caz concret.

- Găsirea imediată a principiului (-iilor) de organizare a unor serii de numere.

- Manifestarea tendinței de condensare/contragere a raționamentelor în rezolvarea problemelor de matematică.

- Aflarea mai multor soluții la o problemă dată; trecerea cu ușurință de la un mod de rezolvare la altul (la unul diferit).

- Tendința spre simplitate și economicitate.

- Reținerea/memorarea cu precădere a principiilor de rezolvare și mai puțin a datelor concrete²⁸.

Datele obținute în cadrul unor cercetări proprii, având ca scop problema cunoașterii și dezvoltării abilității de simbolizare, respectiv de percepere și reprezentare spațială, indică același fenomen: conturarea / „schițarea” la elevi încă din primii ani ai contactului sistematic cu matematica, a unor însușiri psihice specifice, asemănătoare ca funcționalitate cu viitoarele componente structurale ale aptitudinilor matematice.

Am constatat, astfel, că mai mult de jumătate din elevii claselor mici (7–11 ani), deși nu utilizase mai înainte alte semne decât numerele arabe, reușesc acum, după 1–2 exerciții de învățare, să rezolve destul de repede și corect probleme în care sarcina era de a stabili relații și de a efectua operații aritmetice simple cu date simbolice de tipul: numere grupate (de fapt, puncte în număr de 3, marcate pe un suport material), desene cu obiecte și ființe, având caracteristici cantitative și spațiale diferite și, în fine, semne algebrice (litere), reprezentând unul sau mai multe numere.

²⁷ V. A. Krutețkii, *op. cit.*, p. 212-214.

²⁸ I. V. Dubrovina, *Individualnâie razlicii v sposobnosti k obobșcenii matematicheskogo i nematematicheskogo materiala v mladșem školnom vozraste*, în: V. A. Krutețkii (red) „Voprosi psihologii sposobnosti”, Moskva, Izd-vo Pedagoghika, 1966, p. 39-40 și 88-89.

A doua constatare se referă la progresul înregistrat de subiecții cuprinși în cercetare. În momentul de plecare (clasa a II-a), diferențele dintre punctajele/cotele realizate de elevi la probele de simbolizare au fost nesemnificative. După 2 ani (la nivelul clasei a IV-a) acestea nu numai că se adâncesc, dar se observă chiar și o grupare a elevilor: unii care obțin rezultate foarte bune (aproximativ 20% din efectivul total) și alții – cu rezultate nesatisfăcătoare (aproximativ 15% din total). Ținând seama de faptul că în învățarea matematicii fiecare nouă etapă începe, de regulă, cu rezultatele etapei anterioare și se termină cu elaborarea unor modele noi de acțiune, avem toate motivele să presupunem că ascendența dobândită la un moment dat va deveni suport pentru dezvoltarea unor componente aptitudinale specifice.

Interesantă este și evoluția capacității de percepere și reprezentare spațială la școlarii mici. Aceasta apare ca fiind relativ bine dezvoltată în cazul sarcinilor simple (de exemplu, perceperea figurilor plane, bidimensionale) și slab dezvoltată, în sarcinile complexe (perceperea figuri tridimensionale). Cele două aspecte ale capacității de percepere și reprezentare urmează în evoluția lor traiectorii relativ distincte: diferența dintre cotele obținute la probele „figuri plane” și respectiv „figuri în spațiu” este maximă la nivelul clasei a II-a (8 ani), devine moderată/medie la nivelul clasei a V-a (12 ani) și minimă la vârsta adolescenței.

În concluzie, se poate afirma că la școlarii mici (8–11/12 ani), deși nu apare o structură aptitudinală propriu-zisă, anumite manifestări specifice nu pot fi ignorate. Avem în vedere în acest sens diferențele observate în procesul de percepere și generalizare a informației matematice, capacitatea de înțelegere și rezolvare a problemelor neuzuale și cotele de progres realizate prin trecerea de la o etapă la alta a învățării.

B. MANIFESTAREA APTITUDINILOR MATEMATICE LA VÂRSTA ȘCOLARĂ MIJLOCIE (12–16 ANI)

Din punct de vedere al dezvoltării intelectuale, vârsta școlară mijlocie corespunde stadiului operațiilor formale, când copilul devine capabil de a se desprinde de concret și de a situa realul într-un ansamblu de transformări posibile²⁹. Este perioada când se pun la un nivel superior problemele conștiinței de sine, când se dezvoltă interesele și se stabilizează aptitudinile speciale ale omului. Cercetări ample asupra aptitudinilor matematice la preadolescenți au efectuat autori ca: V. A. Krutetskii, R. Gullasch, M. Bejat și A. Perju ș.a.

Un prim factor considerat de V.A. Krutetskii ca având un rol esențial în structura aptitudinilor matematice la școlari este capacitatea de percepere formalizată (*formalizovannoe vopriiatie*) a materialului matematic, însușire care se manifestă în procesul perceperii datelor și condițiilor problemei și constă în înțelegerea relativ rapidă și corectă a structurii sale formale. Urmează o serie de

²⁹ J. Piaget, *Psihologia inteligenței*, București, Edit. Științifică, 1965.

factori sau componente care își relevă prezența în procesul de prelucrare primară și secundară a informațiilor disponibile: generalizarea (imediată, directă, fără comparații, adesea pe baza unui singur caz); contragerea raționamentelor matematice și a sistemelor de acțiune corespunzătoare; flexibilitatea proceselor cognitive (exprimată în lipsa inerției, găsirea de soluții alternative, absența interferențelor); străduința spre claritate, simplitate și economicitate și reversibilitatea proceselor gândirii (trecerea la rezolvări inverse, fără efort vizibil și fără o învățare prealabilă). Ultimul factor important se relevă în procesul de păstrare/conservare a informației matematice și constă în: reținerea structurilor de bază, a principiilor și schemelor generale de rezolvare și „uitarea” datelor concrete, a informației de prisos³⁰.

Un alt autor care a efectuat cercetări asupra gândirii matematice la elevii de vârstă școlară mijlocie este R. Gullash. Plecând de la ideea că la baza oricărui proces de gândire stau operațiile de analiză și sinteză, acesta își asumă sarcina de a investiga diferențele individuale (cognitive) care apar în procesul de rezolvare a problemelor matematice. Sarcinile experimentale au fost astfel alese încât să poată fi puse în evidență nivelurile la care se desfășoară operațiile de abstractizare, generalizare, reversibilitate și contragere în procesul de analiză și sinteză a datelor prezentate. Rezultatele obținute sunt redată sub forma unei scheme cu șase niveluri, fiecare reprezentând un anumit grad de dezvoltare a indicatorului (funcției) urmărit. Subiecții cu aptitudini matematice superior dezvoltate realizează operațiile menționate la nivelurile unu și doi, adică cele mai înalte, în timp ce elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate nu depășesc nivelurile medii (3 și 4) Concluzia: diferențele dintre grupele de subiecți comparate sunt date de nivelul la care se desfășoară operațiile de abstractizare, generalizare, reversibilitate și reducere/condensare, atât în cazul sarcinilor cu conținut aritmetic sau algebric, cât și a celor de geometrie³¹.

Coroborând datele de mai sus cu cele rezultate din cercetarea proprie³², putem afirma că vârsta școlară medie (13–16 ani), este – din perspectiva problemei analizate – perioada în care diferitele componente aptitudinale ating niveluri relativ înalte, când acestea se îmbină și interacționează, formând o structură psihică specifică și armonios dezvoltată.

C. STRUCTURA APTITUDINILOR MATEMATICE LA ELEVII DE VÂRSTĂ ȘCOLARĂ MARE (16–20 ANI)

Perioada pubertății fiind încheiată, copilul intră într-o fază evolutivă în care dominante sunt tendințele de echilibrare, de clarificare a idealurilor și opțiunilor, de

³⁰ V. A. Krutetskii, *op. cit.*, p. 246-331.

³¹ R. Gullash, *op. cit.*

³² I. Berar, *op. cit.*, p. 153-158.

dezvoltare armonioasă a întregii personalități³³. Se înregistrează acum fenomene legate de diversificarea domeniilor de manifestare a aptitudinilor, inclusiv a celor matematice. Diferitele componente aptitudinale devin mai suplă, mai profunde și mai eficiente.

Analizând particularitățile aptitudinilor matematice la vârsta adolescenței, S. I. Șapiro³⁴ găsește câteva aspecte demne de remarcat.

Astfel, în cazul componente *capacitate de generalizare* autorul stabilește existența a trei niveluri de manifestare: a) inferior, când generalizarea se produce ca urmare a solicitării venite din partea profesorului; b) mediu, când elevul generalizează ca urmare a unei necesități interne de rezolvare a problemei și c) superior, când elevul generalizează fără ca rezolvarea problemei să impună o asemenea necesitate. Tocmai acest din urmă nivel, oglindit în tendința de a rezolva fiecare problemă dată în formă generală, caracterizează gândirea matematică superioară.

Componenta denumită *capacitate de contragere* (de condensare, reducere) ia acum forme specifice de genul: a) rezolvarea contrasă nu numai a problemelor cunoscute, ci și a celor de tip nou; b) absența conștientizării verigilor omise și c) „dificultăți” în rezolvarea desfășurată (pas cu pas) a problemelor.

Asociațiile inverse (sau trecerea de la o cale directă la una inversă de rezolvare a problemelor) sunt, de asemenea, caracteristici ale gândirii elevilor cu aptitudini matematice. La aceștia, asociațiile inverse apar, se păstrează și se actualizează în strânsă legătură cu cele directe. La elevii slabi, dimpotrivă, asociațiile directe și indirecte par a fi independente una de alta.

Analizând modul în care se îmbină componenta geometrică cu cea analitică în gândirea elevilor, S.I. Șapiro ajunge la concluzia că în cazul celor cu aptitudini ridicate pentru matematică, acesta poate fi definit ca armonios și adecvat tipului de problemă. Elevii „matematicieni” manifestă o vădită tendință de utilizare a modelelor generale, abstract-simbolice sau trigonometrice. Dimpotrivă, la elevii cu aptitudini reduse pentru matematică se produce o ruptură între componenta geometrică și cea analitică. Ei recurg cu plăcere la modele geometrice concrete, gândirea lor apare ca fiind de un tip primitiv, intuitiv-concret.

Datele preliminare obținute în cadrul unei cercetări recente proprii demonstrează că la vârsta adolescenței posibilitățile de percepere și reprezentare spațială continuă să se dezvolte la toate categoriile de elevi. Se amplifică mai ales funcțiile implicate în reprezentarea figurilor tridimensionale. La acest indicator coeficientul de realizare cunoaște o creștere de 33% pe intervalul de vârstă 15–19 ani.

Se poate, prin urmare, concluziona că diferitele componente care structurează aptitudinile matematice continuă să se dezvolte la vârsta școlară mare, devenind

³³ E. Verza, *Psihologia vârstelor*, București, Editura Hyperion, 1993, p. 105-120.

³⁴ S. I. Șapiro, *Psihologiceskii analiz strukturi matematicheskikh sposobnostei v staršem shkolnom vozraste*, în: V. A. Krutetskii (red.) „Voprosi psihologii sposobnostei”, Moskva, Izd-vo Pedagoghika, 1973, p. 90-129.

mai profunde, mai suple și mai eficiente. Astfel, generalizarea materialului matematic se produce imediat și pe planuri multiple, reversibilitatea se manifestă cu egală ușurință atât în operațiile directe, cât și în cele inverse, contragerea raționamentelor devine tot mai puțin controlată conștient, reprezentarea spațială se adâncește, reușind să rețină un volum sporit de relații ascunse vederii, iar memoria păstrează cu prioritate schemele generale de acțiune, rezolvările tipice și datele esențiale.

Încheiem seria de date și idei referitoare la caracteristicile aptitudinilor matematice cu următoarele concluzii:

a) Ca structură/complex de însușiri relativ stabile și totodată dinamice, aptitudinea matematică se bazează pe toate procesele și calitățile psihice solicitate de activitatea matematică. În constituirea și manifestarea sa intră nu numai componente cognitive, ci și afective, motivaționale și atitudinale. Specificul structurii depinde atât de calitățile fiecărei componente, cât și de tipul interacțiunilor dintre acestea, interacțiuni care se produc după „formule” mai mult sau mai puțin strict personalizate.

b) La elevii „matematicieni” aptitudinea matematică: are o pondere însemnată în structura de ansamblu a personalității; îndeplinește roluri centrale și coordonatoare în procesul de receptare, stocare și utilizare a informației; imprimă o notă specifică modului de funcționare a celorlalte substructuri ale personalității și, în fine, imprimă întregii personalități un profil predominant matematic.

c) Aptitudinile matematice sunt rezultate ale dezvoltării, ale interacțiunii dintre premisele ereditare și condițiile de mediu socio-cultural. Caracterul lor, mai mult sau mai puțin eficient, depinde de modul în care se realizează modelarea potențialităților ereditare (inclusiv cele prenatale) de către factorii ambientali și, mai ales, de măsura în care subiectul se implică în propria sa devenire.

d) Între conținutul învățării și abilitățile intelective ale copilului există strânse raporturi de condiționare reciprocă. Acumularea de cunoștințe, priceperi și deprinderi duce la dezvoltarea și transformarea calitativă a schemelor de cunoaștere și acțiune matematică, iar acestea, la rândul lor, reglează cantitatea și calitatea achizițiilor școlare.

e) O preocupare de larg interes, atât pentru profesori, cât și pentru elevi, o constituie problema cunoașterii și dezvoltării aptitudinilor matematice în activitatea de învățare școlară. Metodele mai frecvent folosite în acest scop sunt: evaluările curente (finalizate cu note școlare), testările periodice efectuate cu probe standardizate (de aptitudini și cunoștințe), observațiile sistematice efectuate de profesorii de specialitate, încurajarea și stimularea elevilor pentru a participa la diverse cercuri științifice, concursuri școlare și olimpiade, recurgerea la metode și procedee de lucru inedite, interesante, stimulative pentru dezvoltarea curiozității epistemice a elevilor, pentru formarea unor veritabile interese sau chiar pasiuni pentru domeniile matematicii.