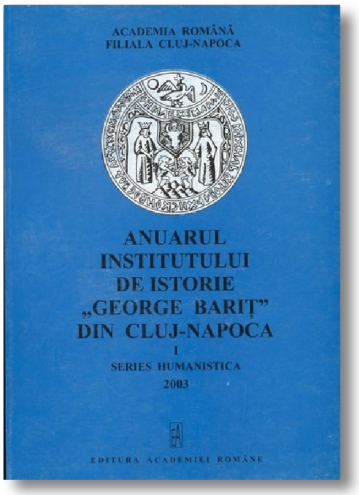

ISSN 1584-4404

Yearbook of the George Barițiu History Institute of Cluj-Napoca
Series *Humanistica*

humanistica.ro

Particularități ale aptitudinilor matematice la școlari

Ioan Berar

How to cite this article:
Berar, Ioan (2003) *Particularități ale aptitudinilor matematice la școlari*, Yearbook of the George Barițiu History Institute of Cluj-Napoca, Series Humanistica, Vol. 1, pp. 11–25. DOI: 10.5281/zenodo.22965453

© 2003: The Publishing House of the Romanian Academy.
Humanistica Yearbook is published online since 2003.
Submit your article to Humanistica Yearbook: secretariat.dcsu@acad-cj.ro

PARTICULARITĂȚI ALE APTITUDINILOR MATEMATICE LA ȘCOLARI

Ioan Berar
Institutul de Istorie „George Barițˮ din Cluj-Napoca

Primele încercări de abordare a problemei aptitudinilor matematice se leagă de numele unor cunoscuți psihologi și matematicieni, care au trăit și și-au făcut cunoscute ideile în prima jumătate a secolului trecut: A. Binet, E. L. Thorndike, A. Ruthe, A. L. Rogers, A. F. Lazurski, respectiv, H. Poincaré, D. M. Boltovski, J. Hadamard ș.a. Date interesante au fost obținute în cadrul cercetărilor bazate pe analiza factorială a rezultatelor la testele de inteligență și la cele cu conținut matematic: C. Spearman, L. L. Thurstone, J. P. Guilford, M. Bejat și A. Perju etc. În spiritul teoriei promovate de S.R. Rubinstein[1] cu privire la natura proceselor cognitive, reținatenția, prin originalitatea ipotezelor de lucru adoptate și prin metodele de verificare utilizate, cercetările efectuate de autori ca: R. Gullasch, G. Pippig, N. A. Mencinskaia și M. I. Moro. Teoria formării operațiilor mintale ca rezultat al interiorizării acțiunilor externe[2] a constituit fundamentul unor ample și rodnice cercetări privitoare la structura și dinamica aptitudinilor matematice la școlari: K. Lowell, V. V. Davâdov, Z. P. Dienes, B. Zörgö ș.a.[3]

Abordând problema structurilor psihice dintr-o perspectivă fondată pe principii și metode proprii teoriei sistemelor și ciberneticii, V. A. Krutețki reliefează câțiva factori cu rol esențial în configurarea aptitudinilor matematice la școlari. Primul dintre aceștia a fost denumit capacitate de percepere formalizată (*formalizovannoe vospriiatie*) a materialului matematic, o însușire complexă care se manifestă prin: recunoașterea imediată a datelor și condițiilor problemei, înțelegerea relativ rapidă a structurii formale a acesteia, conștientizarea relațiilor esențiale dintre indicatori și nerecurgerea la date puțin semnificative sau de prisos.

---

[1] S. R. Rubinstein, *Problemî obșcei psihologhii*, Moskva, Izd-vo Pedagoghika, 1973.

[2] Teorie inițiată de P. Janet, continuată de J. Piaget și dezvoltată de P. I. Galperin, în *Psihologhiia mâșleniia i ucenie o poetapnom formirovanii umstvennâh deistvii*, „Issledovaniia mâșleniia v sovetskoi psihologhiiˮ, Moskva, Izd-vo Nauka, 1966.

[3] I. Berar, *Aptitudinea matematică la școlari*, București, Edit. Academiei Române, 1991, p. 16-20.

An. Inst. de Ist. „G. Barițˮ din Cluj-Napoca, Series Humanistica, tom. I, 2003, p. 11–25

Urmează, apoi, o serie de factori implicați în activitatea de procesare a informațiilor matematice: capacitatea de generalizare imediată și de amploare a datelor, flexibilitatea proceselor gândirii, străduința spre claritate și economicitate și, în fine, reversibilitatea proceselor gândirii. Ultimul factor evidențiat se referă la păstrarea informației matematice și constă în: reținerea esențialului (scheme de acțiune, structuri de bază, principii generale de rezolvare) și „uitarea" datelor concrete, a informației de prisos din problema dată[4].

Formându-se și dezvoltându-se în activitatea de învățare a matematicii, aptitudinea la care ne referim acum are darul de a facilita însușirea unui anumit volum de cunoștințe, priceperi și deprinderi specifice și, totodată, de a orienta într-o anumită direcție curiozitatea epistemică firească a copilului, de a-l face să îndrăgească lumea aparent rece și abstractă a obiectelor și relațiilor cantitative și spațiale. Ajunsă la un nivel superior de dezvoltare, aptitudinea matematică conferă o înaltă eficacitate activității de învățare și utilizare a matematicii. Sarcina asumată în cadrul cercetării noastre a fost de a reliefa factorii care structurează aptitudinea matematică la școlari, adică de a evidenția și explica acele însușiri psihice ale elevilor care, în condiții egale de efort și oportunități educative, duc la rezultate diferite în activitățile cu conținut matematic.

Ipoteza de lucru de la care am plecat își are originea atât în rezultatele unor cercetări anterioare[5, 6, 7], cât și în datele obținute cu ocazia unor investigații personale[8]. Am ajuns, astfel, la presupunerea că *aptitudinea matematică reprezintă o structură relativ unitară și distinctă, constituită din mai mulți factori specifici, a căror pondere variază în funcție de conținutul sarcinii și etapele de rezolvare a acesteia.*

Pentru verificarea ipotezei de lucru adoptate am recurs la două categorii de probe: normative (teste de aptitudini și cunoștințe matematice) și formative. Fiind o măsură obiectivă și standardizată, testul reușește să ofere informații despre diferențele individuale dintre subiecți, inclusiv despre particularitățile psihice ale acestora în procesul de rezolvare a unor probleme cu conținut matematic. Pe scurt, probele normative utilizate au fost[9]: 1. *Serii de numere*, 2. *Probleme*, 3. *Figuri plane*, 4. *Rotire cuburi*, 5. *Test de cunoștințe matematice*, 6. *Numărare figuri geometrice*, 7. *Memorare numere*, 8. *Numărare cuburi*, 9. *Matricile progresive Raven* (seriile A, B, C, D, E), 10. *Atenție concentrată.*

---

[4] V. A. Kruteţkii, *Psihologhiia matematiceskih sposobnostei şkolnikov*, Moskva, Izd-vo Prosveşcenie, 1968, p. 385.

[5] R. Gullasch, *Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten*, Berlin, Volk und Wiessen Volkseigener Verlag, 1971.

[6] V.A. Kruteţkii, *op. cit.*

[7] Al. Roşca, B. Zörgö, *Aptitudinile*, Bucureşti, Edit. Ştiinţifică, 1972.

[8] I. Berar, *Cunoaşterea şi cultivarea aptitudinilor matematice la elevii de vârstă şcolară mică şi mijlocie*, în: B. Zörgö şi I. Radu (coord.), *Studii de psihologie şcolară*, Bucureşti, Edit. Didactică şi Pedagogică, 1979.

[9] Probele sunt prezentate în: I. Berar, *op. cit.*, p. 162-182.

Datele obținute cu ajutorul acestor probe – toate aplicate colectiv – au fost întregite cu încă două variabile: notele medii la matematică și, respectiv, la fizică. Relațiile strânse dintre aptitudini și cunoștințe justifică o asemenea procedură. În plus, se amplifică baza primară de date pentru realizarea unei cercetări de tip statistic / cantitativ.

Dând curs orientării complementariste, care promovează ideea îmbinării demersului cantitativ cu cel calitativ[10], în cercetarea proprie am coroborat rezultatele analizei cantitative a cotelor la testele de aptitudini matematice cu cele obținute prin probe calitative, de tip formativ.

La baza probelor de tip formativ se află ideea că un anumit nivel de dezvoltare aptitudinală poate fi explicat ca efect al unui ansamblu controlabil de influențe instructive iar diferențele dintre subiecți pot fi puse pe seama receptivității acestora la influențele menționate. O probă diagnostică formativă este o problemă a cărei rezolvare nu depinde direct de setul de cunoștințe, priceperi și deprinderi stocate în memoria subiectului, ci de experiența pe care acesta o câștigă în și prin procesul rezolvării ei[11].

Probele formative la care am recurs în cercetarea proprie au fost:

1. *Turnul din Hanoi,* probă utilizată pentru cunoașterea unor caracteristici aptitudinale ca: orientarea în sarcină/problemă, rapiditatea și trăinicia învățării prin încercare și eroare, receptivitatea la ajutor extern, flexibilitatea gândirii, generalizarea unor scheme de rezolvare, interesul și atracția pentru problematic, perseverența în rezolvarea unor sarcini dificile ș.a.
2. *Ghici numărul,* folosită pentru atingerea unor obiective de genul: reliefarea capacității subiectului de a descoperii independent sau cu ajutor extern gradual regularități și relații esențiale într-un ansamblu de numere date, manifestarea flexibilității gândirii în procesul de rezolvare a unor probleme, receptivitatea la ajutor extern etc.
3. *Balanța fructelor în depozit,* utilizată pentru reliefarea capacității de orientare adecvată în sarcini cu conținut matematic prezentat în forme/expresii algebrice, geometrice și aritmetice.
4. *Numărare figuri geometrice,* probă care permite cunoașterea unor aspecte aptitudinale nu numai pe baza rezultatelor, ci și a procesualității, adică a strategiilor utilizate, a momentelor de „iluminare" și „rătăcire", de evitare sau repetare a unor greșeli etc.

Ambele categorii de probe au fost aplicate în două etape diferite, la subiecți cu vârste cuprinse între 14 și 17 ani. Prima aplicare a avut loc în perioada 1980–1982, rezultatele obținute au fost publicate în lucrarea *„Aptitudinea matematică la*

[10] A. Băban, *Metodologia cercetării calitative*, Cluj-Napoca, Edit. Presa Universitară Clujeană. 2002, p. 167-173.

[11] I. Berar, *Diagnosticul formativ*, „Anale", Seria psihologie, Timișoara, 1996, p. 22-31.

şcolari"[12]. A doua aplicare s-a desfăşurat în perioada 2000–2002 la subiecţi de aceeaşi vârstă cronologică. Analiza datelor obţinute în a doua etapă a cercetării demonstrează faptul că nu au apărut modificări semnificative în privinţa particularităţilor aptitudinale, ceea ce demonstrează stabilitatea în timp a substructurii investigate şi, foarte probabil, fidelitatea instrumentelor de lucru utilizate.

Coroborând datele rezultate din cercetarea proprie cu cele existente în literatura de specialitate consultată, putem susţine cu suficient temei că ipoteza de lucru a fost pe deplin justificată, că de la o anumită vârstă (14–15 ani) se conturează la elevi – cel puţin la unii dintre ei – o structură psihică complexă, care imprimă un anumit specific şi o eficienţă sporită activităţii de învăţare a matematicii şcolare.

Primul „element" sau prima particularitate se referă la *modul de orientare a elevilor într-o situaţie problematică dată.* Elevii cu aptitudini matematice superior dezvoltate reuşesc să înţeleagă imediat şi corect datele oferite, conştientizează completitudinea, insuficienţa sau excesivitatea acestora, stabilesc cu relativă uşurinţă gradul de rezolvabilitate sau indeterminare al problemei, sesizează momentul şi natura greşelilor comise, realizează transferuri oportune de cunoştinţe şi strategii de rezolvare. Aceştia nu se lasă copleşiţi de specificul şi volumul datelor, fie ele concrete sau abstracte, numerice, literale (algebrice) sau figurale (geometrice); suficiente, lacunare sau de prisos. Ei îşi fixează de la bun început atenţia asupra întrebării sau obiectivului de atins, surprind cu multă exactitate structura de ansamblu a problemei.

Un cu totul alt mod de orientare în problemă se observă la elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate. Aceştia fie că nu reţin toate datele problemei, fie că nu sesizează raporturile logice dintre ele. Rezultatul este, de cele mai multe ori, lipsa de înţelegere a sensului, a ceea ce se cere în finalul activităţii.

Asemenea deosebiri sunt, foarte probabil, determinate de nivelul diferit de dezvoltare al uneia dintre componentele de bază ale aptitudinii matematice, componentă care ar putea fi exprimată prin termeni ca: simţ sau sensibilitatea matematică (prin analogie cu sensibilitatea muzicală, de exemplu), intuiţie matematică, orientare matematică a gândirii, capacitatea matematică sau, pur şi simplu, factorul 0, asemănător cu factorul N, reliefat de L. L. Thurstone[13]. Dacă admitem că orice aptitudine reprezintă o grupare („cluster") de abilităţi[14], atunci factorul 0 ar putea fi denumit *abilitate de orientare adecvată* într-o situaţie problematică dată.

Abilitatea de orientare adecvată în situaţii problematice corelează semnificativ (r = .834) cu factorul GM denumit de noi gândire matematică, factor

[12] *Ibidem.*

[13] L. L. Thurstone, *Primary Mental Abilities*, Illinois, Chicago, The University of Chicago Press, 1938.

[14] T. I. Horrocks, Schoonover, *Measurement for Teachers*, Ohio, Columbus, 1968.

care saturează puternic probele „Probleme" şi „Test de cunoştinţe matematice"[15]. Interesant de semnalat este şi faptul că abilitatea de orientare în problemă devine o variabilă dependentă de caracteristicile sarcinii: este mai ridicată în probele asemănătoare problemelor matematice şcolare (exp. „Balanţa fructelor în depozit") şi mai scăzută în probele neuzuale („Turnul din Hanoi", „Ghici numerele" şi „Numărare figuri geometrice").

Componenta aptitudinală la care ne referim se aseamănă în unele privinţe cu factorul denumit de către V. A. Krutetkii ca tendinţă/factură matematică a gândirii (*matematiceskaia napravlionnost uma*)[16]. Legături are, desigur, şi cu ceea ce B. Zörgö denumeşte *formularizare generalizată a problemei*[17].

O a doua componentă importantă în structura aptitudinilor matematice o reprezintă *abilitatea de a sesiza, reţine şi valorifică adecvat* acele date şi relaţii care au atributele de a fi comune şi esenţiale pentru una sau mai multe categorii de probleme. În cercetarea noastră această însuşire s-a manifestat mai ales în cazul rezolvării problemelor formative (aplicate individual). La baza generalizării regulilor şi schemelor de rezolvare s-a aflat, foarte probabil, experienţa anterioară a subiecţilor, inclusiv cunoştinţele dobândite în chiar procesul de rezolvare a situaţiilor – test.

Ceea ce diferenţiază profund grupele de elevi comparate este receptivitatea la ajutor extern. Majoritatea subiecţilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate au reuşit să rezolve probele aplicate după faza de ajutor minim, aproximativ o treime – după faza de ajutor mediu şi doar în cazuri excepţionale a fost nevoie de ultima fază, adică de ajutor maxim. Total diferită este situaţia în cazul elevilor cu aptitudini matematice slab dezvoltate. La aceştia curba receptivităţii la ajutor extern se inversează, ia valori minime la începutul etapei şi maxime la sfârşitul acesteia. Faptul că saltul se produce mai repede şi cu relativă uşurinţă la elevii buni faţă de cei slabi la matematică îşi are explicaţia, probabil, în nivelul actual al dezvoltării lor intelectuale şi/sau în specificul „zonei proximei dezvoltări"[18]. Tocmai măsura ajutorului de care are nevoie copilul pentru însuşirea noilor cunoştinţe constituie unul dintre parametrii capacităţii de învăţare şi, deci, a abilităţii intelectuale a cărei componentă este.

Abordând generalizarea ca indicator de bază al analizei şi sintezei (alături de abstractizare, revenibilitate şi contragere) se constată că aceasta este bună şi foarte bună la elevii cu rezultate superioare la matematică şi mult deficitară la ceilalţi[19].

Abilitatea de a generaliza în sfera obiectelor şi relaţiilor matematice se regăseşte şi în modul de rezolvare a probelor normative. Factorul rezultat în urma

---

[15] I. Berar, *op. cit*, p. 58-59.

[16] V. A. Krutetki, *op. cit.*, p. 386.

[17] B. Zörgö, *Formularea generalizată a acţiunii în rezolvarea problemelor de aritmetică la şcolarul mic*, „Studia Universitatis Babeş-Bolyai", Series psychologia-paedagogia, Cluj-Napoca, 1962.

[18] L. S. Vâgotski, *Opere psihologice alese*, vol. I-II, Bucureşti, Edit. Didactică şi Pedagogică, 1971.

[19] R. Gullasch, *op. cit.*, p. 78-80.

analizei intreprinse (convenţional denumită G) are o contribuţie de 14,32% la saturarea bateriei de probe utilizate. Cele mai ridicate corelaţii le are acest factor cu probele „Şiruri de numere" şi „Matricile progresive Raven", adică tocmai cu acele sarcini care solicitau cu precădere capacitatea/priceperea subiecţilor de a desprinde din ansamblul de date prezentate, un anumit principiu de organizare.

Abilitatea de a generaliza este o caracteristică a oricărui om normal, dar manifestarea ei în sfera simbolisticii numerice şi literale, a relaţiilor cantitative şi spaţiale este un privilegiu al matematicienilor[20]. Ca însuşire psihică specifică gândirii matematicianului, generalizarea nu poate fi înţeleasă în afara contextului dat de experienţa anterioară şi a motivaţiei pentru sfera obiectelor şi relaţiilor caracteristice domeniului matematic.

Următoarea *particularitate se referă la modul de percepere şi utilizare a conţinuturilor imagistice*. Abilitatea de a opera cu substitute ale obiectelor caracterizează gândirea omului în toate manifestările sale, o pondere foarte mare având-o în domeniile de interes ale matematicienilor.

În matricea factorilor oblici calculaţi de noi, abilitatea de a percepe şi opera cu forme, mărimi (întindere, volum, grosime, lungime, lăţime, înălţime), poziţii, ordine, distanţe etc., are o arie relativ largă de manifestare sau, altfel spus, contribuie semnificativ la saturarea majorităţii variabilelor / probelor utilizate. Aşa de exemplu, cu proba „Figuri plane", r = .679, iar cu „Numărare cuburi", r = .679.

În cazul probelor formative, aspectele care diferenţiază pregnant grupele contrastante de elevi sunt date de amploarea schemelor de acţiune folosite în rezolvarea probei „Turnul din Hanoi", sesizarea caracterului multifuncţional al liniilor din proba „Numărare figuri geometrice" şi numărul greşelilor comise.

Abilitatea la care ne referim apare ca esenţială şi necesară în organizarea şi desfăşurarea oricărei forme de activitate. Ca proces, aceasta duce la construirea imaginii obiectului în absenţa sa, la conturarea unui model ideal cu conţinut intuitiv, iar ca însuşire diferenţială a personalităţii, la performanţe inegale în activităţile caracterizate printr-un grad ridicat de intuitivitate. Împreună cu cuvântul, adesea în „simbioză" cu acesta, reprezentările constituie suportul concret – informaţional al cunoaşterii şi comunicării.

În matricea finală, calculată pe baza datelor obţinute ca urmare a aplicării bateriei de probe normative, apare un factor cu o contribuţie ridicată (12,184%) la ansamblul saturaţiilor factoriale. Acesta saturează semnificativ (.742) proba „Numărare figuri geometrice" şi moderat, alte trei probe: „Probleme", „Numărare cuburi" şi „Matricile progresive Raven". Având în vedere că toate aceste probe vizează cu precădere priceperea subiectului de a stabili asociaţii logice, inedite între datele problemei, adesea chiar de a le restructura de mai multe ori, apreciem că factorul în discuţie nu poate reprezenta altceva decât *flexibilitatea gândirii*. Date relevante privitoare la flexibilitatea proceselor cognitive au fost obţinute şi cu

[20] V. A. Krutetkii, *op. cit.*, p. 289.

ocazia aplicării probelor formative anterior menţionate la eşantioane contrastante de subiecţi, sub aspectul dezvoltării lor intelective[21].

Mai mult, poate, decât în cazul altor discipline şcolare, asimilarea şi utilizarea cunoştinţelor matematice se bazează pe experienţa anterioară a copilului, pe transferul unor priceperi şi scheme de acţiune de care acesta dispune. Cu alte cuvinte, un rol important în învăţarea matematicii şcolare şi, implicit, în dezvoltarea aptitudinilor matematice îl au calităţile mnezice. Ca însuşire diferenţială a persoanei, memoria trebuie abordată cel puţin sub următoarele două aspecte: a) ca orientare mnezică generală a persoanei şi b) ca particularităţi tipologice, manifestate în fazele de percepere, păstrare şi valorificare a informaţiei matematice.

În planul orientării mnezice se constată că elevii cu aptitudini matematice superior dezvoltate se deosebesc de colegii lor mai puţin dotaţi pentru această disciplină prin: atenţia sporită pe care o acordă aspectelor cantitative şi spaţiale ale realităţii, interesul şi plăcerea faţă de problematic, amploarea şi rapiditatea cu care reţin informaţiile vehiculate prin numere, imagini şi formule, uşurinţa cu care stabilesc relaţii logice între datele unei probleme etc.

Urmărind modul de rezolvare a probelor formative utilizate în cercetarea noastră[22], am constatat că aproape toţi subiecţii cu care am lucrat recurg cu uşurinţă (poate chiar cu prea mare uşurinţă) la experienţa anterioară, mai ales la structuri de cunoştinţe dobândite pe parcursul procesului rezolutiv, fără a sesiza faptul că noua situaţie problematică numai în aparenţă este identică cu cea anterioară. Deosebirile dintre grupele de elevi comparate devin evidente în momentele de impas, atunci când conştientizează că au greşit. Elevii cu aptitudini matematice superior dezvoltate caută şi de cele mai multe ori găsesc soluţia corectă, în timp ce colegii lor mai puţin dotaţi persistă în eroare, repetă aceleaşi greşeli (exemplu la „Turnul din Hanoi").

Valorificarea experienţei anterioare este puternic marcată de complexitatea sarcinii. În cazul probelor relativ simple, aproape toţi subiecţii trec fără ezitări la acţiune, folosind scheme şi modalităţi de rezolvare rutiniere. Cu totul alta este situaţia în cazul sarcinilor complexe, când elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate nu reuşesc să le rezolve decât cu ajutor mediu sau maxim din partea examinatorului. În schimb, subiecţii cu aptitudini matematice superior dezvoltate învaţă masiv din propriile greşeli şi nu au nevoie decât rareori de ajutor extern.

Analizând tempoul sau ritmul de avansare în procesul de învăţare, am constatat că acesta creşte la ambele categorii de subiecţi, dar în mod inegal. Avantajul este de partea elevilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate care

---

[21] I. Berar, *Flexibilitatea proceselor cognitive ca indicator al supradotării,* în: V. G. Todea (coord.) „Conferinţa internaţională de psihologie (3, 2001, Sinaia)", Edit. Augusta, Timişoara, 2002, p. 191-196.

[22] Probe având caracterul de probleme bine definite. A se vedea şi lucrarea M. Miclea, P. Curşeu, *Modele neurocognitive*, Cluj-Napoca, Edit. A.S.C.R., 2003, p. 71-72.

obţin un coeficient de progres de două ori mai ridicat, atât în privinţa dimensiunii numărului de greşeli, cât şi a timpului de lucru necesar pentru rezolvare.

În consecinţă, se poate afirma cu suficient temei că anumite calităţi mnezice (rapiditate, volum, structurare logică ş.a.) intră ca „elemente" constitutive în formarea şi dezvoltarea aptitudinilor matematice la şcolari.

În strânsă legătură cu memoria este factorul numit de noi *experienţă logico-matematică*. Acumulată treptat în diverse activităţi anterioare (joc, comunicare, învăţare şcolară şi extraşcolară), acest tip de experienţă joacă un rol important în formularea şi rezolvarea de probleme cu conţinut matematic.

Ideea de mai sus apare în lucrările multor autori. „Aptitudinea matematică – notează Al. Roşca şi B. Zörgö – depinde nu numai de contactul activ cu modelul extern al activităţii matematice, ci şi de anumite condiţii interne. Sunt necesare anumite potenţialităţi active primare formate în experienţa de toate zilele pe baza modelelor genetice, cum ar fi de exemplu anumite procese ale gândirii, ale memoriei, atenţiei etc."[23] Cu alte cuvinte, nu activităţile în sine, nu experienţa ca volum de cunoştinţe, priceperi şi deprinderi intră aici pe prim plan. Ceea ce contează este efectul acestora asupra proceselor psihice implicate în activitatea matematică.

Datele obţinute în cercetarea noastră confirmă pe deplin relaţia dintre nivelul dezvoltării aptitudinale şi experienţa logico-matematică. Elevii cu aptitudini matematice dezvoltate prezintă, comparativ cu ceilalţi, o superioritate evidentă nu numai la probele de cunoştinţe matematice, ci şi la cele cu conţinut mixt (matematic şi nematematic). Edificator este şi faptul că în faza rezolvărilor independente a probelor formative, când cunoştinţele specifice erau încă minime, rezultatele obţinute au fost nu numai modeste, dar şi puţin diferenţiatoare. Treptat, din confruntarea cu problema dată rezultă un anumit câştig pentru toţi elevii, dar acesta pare a fi mai substanţial în cazul primei categorii de mai sus. Diferenţele între grupele comparate se amplifică după fiecare fază de ajutor extern, ceea ce semnifică existenţa unor raporturi de susţinere între aptitudinea matematică şi experienţa logico-matematică a subiecţilor noştri.

Implicarea experienţei anterioare în rezolvarea sarcinilor cu conţinut matematic este demonstrată şi de valoarea coeficienţilor de corelaţie dintre factorul E şi unele probe utilizate în cercetare[24].

În concluzie, experienţa logico-matematică îşi face simţită prezenţa în formarea şi manifestarea aptitudinilor matematice la şcolari, este un puternic stimulent pentru dezvoltarea componentelor: orientarea adecvată în sarcină, flexibilitatea proceselor cognitive şi capacitatea de a generaliza.

În cercetarea proprie am agreat ideea că aptitudinile omului, fie ele generale sau speciale, nu pot fi limitate la structuri psihice cognitive. Ca atare, am emis

---

[23] Al. Roşca, B. Zörgö, *op. cit.*, p. 25.

[24] Factorul E prezintă corelaţii ridicate cu probele „Nota la matematică" (r = .904) şi „Nota la fizică" (r = .872), în timp ce cu probele neuzuale „Figuri plane" şi „Serii de numere" r = .194 şi, respectiv, r = .182.

ipoteza că la formarea şi manifestarea aptitudinilor matematice vor fi implicate şi componente afective, motivaţionale, volitive şi chiar temperamentale. Pentru a desemna aceste din urmă componente am recurs la expresia *atracţie pentru problematic*. Motivele unei asemenea alegeri sunt: a) în sfera noţiunii de *atracţie* intră, în mai mare măsură decât în cazul celor de preferinţă, interes, tendinţă sau chiar pasiune, acele „elemente" care joacă cu adevărat rolul de mobiluri interne ale conduitei; b) nu se includ aici motivele conjuncturale ale învăţării matematici (de exemplu, lauda, recompensa, personalitatea educatorului etc.); c) expresia îmbină în sine atât valenţe motivaţionale, cât şi afective şi, în fine d) expresia a fost folosită şi de alţi autori, care consideră atracţia pentru problematic drept calitate evidentă, îndeosebi în rezolvarea problemelor cu multe şi interesante implicaţii ascunse[25].

În cercetarea proprie, atracţia pentru problematic a fost investigată prin: a) analiza modului de angajare a subiecţilor în rezolvarea probelor formative aplicate şi b) evidenţierea preferinţelor elevilor pentru diferite obiecte de studiu.

Prin natura lor şi modul de aplicare, toate probele formative au stârnit curiozitatea şi interesul participanţilor, le-au indus acestora încrederea în forţele proprii şi chiar dorinţa de a se afirma într-o competiţie oarecum diferită de ceea ce le oferă şcoala prin programele sale instructive. În această privinţa diferenţele dintre subiecţi au fost nesemnificative.

Imaginea se schimbă îndată ce subiecţii ajung în situaţii de impas şi mai ales de eşec repetat. Elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate încep să manifeste nesiguranţă, apatie, nemulţumire şi chiar abandon, în timp ce colegii lor cu aptitudini matematice superior dezvoltate nu par a se descuraja, devin mai hotărâţi, dornici de a se confrunta cu necunoscutul, cu problematicul. Niciunul dintre aceştia din urmă nu se declară dezamăgit sau „învins", nu devine sceptic în privinţa posibilităţilor sale de a găsi soluţia corectă.

Diferenţele dintre grupele comparate în privinţa atracţiei pentru problematic se adâncesc după etapa acordării de ajutor extern. Urmărind efectele acestui element nou asupra stării psihice a subiecţilor am constatat că toţi elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate au manifestat o vădită satisfacţie pentru sprijinul acordat, în timp ce majoritatea elevilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate au preferat să lucreze în continuare fără indicaţii din partea examinatorului. Mai mult chiar, aceştia şi-au exprimat dorinţa de a rezolva şi alte probe asemănătoare sau chiar mai dificile.

La solicitarea de a indica 2–3 obiecte de studiu preferate, majoritatea subiecţilor cu aptitudini matematice superior dezvoltate notează „matematica", „matematica şi fizica" sau „matematica şi chimia" şi doar doi menţionează alte discipline. În cazul elevilor cu aptitudini matematice slab dezvoltate, situaţia apare ca fiind mult mai diversificată. Dintre aceştia din urmă, unul singur menţionează matematica şi doi – fizica.

---

[25] E. Rusu, *Psihologia activităţii matematice*, Bucureşti, Edit. Ştiinţifică, 1969, p. 17-26.

În concluzie, atracția pentru problematic poate fi considerată ca o particularitate a elevilor cu aptitudini matematice clar conturate. Între cele două dimensiuni ale personalității există strânse raporturi de interdependență: aptitudinea matematică facilitează achiziția de cunoștințe în domeniu, determină o anumită stare de siguranță și satisfacție, iar acestea, la rândul lor, susțin interesul pentru problematic.

Un anumit rol în structura aptitudinilor matematice la școlari îl au și alte componente psihice cum sunt: capacitatea de a memora și opera cu simboluri; mecanismele de autocontrol și autoreglare; concentrarea atenției; fluiditatea verbală ș.a. Fără a avea valori și ponderi la fel de ridicate ca primele prezentate (orientarea în problemă, generalizarea, flexibilitate, reprezentarea spațială și atracția pentru problematic), acestea din urmă conferă, totuși, structurii psihice de care ne ocupăm un plus de originalitate și eficiența.

Aptitudinile matematice, asemenea altor însușiri diferențiale ale persoanei, nu pot fi cu adevărat cunoscute și eficient valorificate fără a reliefa caracteristicile pe care acestea le prezintă în evoluția lor la copil. „Sarcina psihologiei nu constă în a descoperi eternul infantil, ci istoricul infantil sau, folosind expresia poetică a lui Goethe, am putea spune efemerul infantil"[26].

A pune în evidență formele succesive sub care se manifestă aptitudinea matematică la școlari este o operație extrem de dificilă. Există mai multe cauze care generează o astfel de dificultate: diversitatea de opinii cu privire la caracteristicile aptitudinale ale elevilor, în general; dezvoltarea componentelor aptitudinale în funcție de metodele și strategiile utilizate în procesul de învățare a matematicii; proprietatea ca atare a aptitudinii de a evolua în timp nu după o traiectorie prestabilită, ci după un model cibernetic complex și greu de descifrat; eterogenitatea metodelor și instrumentelor de lucru utilizate în cercetare ș.a.

A. MANIFESTAREA APTITUDINILOR MATEMATICE LA ELEVII DE VÂRSTĂ ȘCOLARĂ MICĂ (7–11 ANI)

Este cunoscut faptul că învățătoarele sunt adesea frapate de ușurința și rapiditatea cu care unii dintre elevii lor înțeleg, rețin și operează cu numere și relații cantitative, de rigurozitatea logică a gândirii lor. Mai în glumă, mai în serios aceștia sunt etichetați drept „matematicienii" clasei. Din cazuistica proprie menționez două astfel de cazuri. Elevul D.M., la vârsta de 10 ani, reușește să rezolve corect și cu destulă rapiditate următoarea problemă: „Câți pomi și câte vrăbii există într-o grădină, cunoscând că dacă se așează câte două vrăbii pe un pom, rămâne un pom liber (neocupat), iar dacă se așează câte o vrabie pe un pom, rămâne una fără pom?" Problema este una dificilă chiar și pentru persoanele adulte care nu stăpânesc metoda rezolvării cu ajutorul ecuațiilor.

[26] L. S. Vâgotski, *op. cit.*, p. 62.

V. A. Kruteţkii prezintă mai multe cazuri de copii superior dotaţi în domeniul matematicii. Aşa de exemplu, Sonia L. la vârsta de 3 ani ştia să numere până la 100, la 4 ani explica fratelui său mai mare cum se scade 14 din 27 (la început se scade 10, se obţine 17 şi apoi 4 şi se obţine 13), la 5 ani ajunge la noţiunea de fracţie, iar la 5–6 ani avea o anumită intuiţie a numerelor negative. La 8 ani avea nivelul unui elev de clasa a VI-a, reuşea să rezolve probleme de tipul: Care este lungimea şi viteza trenului, dacă el trece pe lângă un stâlp în 1/4 minute, iar un tren lung de 540 metri îl străbate în 45 secunde?"[27]

Datele cele mai convingătoare sunt, fără îndoială, cele rezultate din cercetări experimentale. Utilizând metoda analizei procesului de rezolvare a unor probe matematice experimentale, I. V. Dubrovina găseşte că superioritatea elevilor cu aptitudini reale pentru matematică comparativ cu colegii lor mai puţin dotaţi constă în:

– Perceperea imediată a datelor şi relaţiilor dintre acestea, formularea corectă a întrebării.

– Rezolvarea problemelor în formă generalizată, ca tipologie şi nu doar ca un caz concret.

– Găsirea imediată a principiului (-iilor) de organizare a unor serii de numere.

– Manifestarea tendinţei de condensare/contragere a raţionamentelor în rezolvarea problemelor de matematică.

– Aflarea mai multor soluţii la o problemă dată; trecerea cu uşurinţă de la un mod de rezolvare la altul (la unul diferit).

– Tendinţa spre simplitate şi economicitate.

– Reţinerea/memorarea cu precădere a principiilor de rezolvare şi mai puţin a datelor concrete[28].

Datele obţinute în cadrul unor cercetări proprii, având ca scop problema cunoaşterii şi dezvoltării abilităţii de simbolizare, respectiv de percepere şi reprezentare spaţială, indică acelaşi fenomen: conturarea / „schiţarea" la elevi încă din primii ani ai contactului sistematic cu matematica, a unor însuşiri psihice specifice, asemănătoare ca funcţionalitate cu viitoarele componente structurale ale aptitudinilor matematice.

Am constatat, astfel, că mai mult de jumătate din elevii claselor mici (7–11 ani), deşi nu utilizase mai înainte alte semne decât numerele arabe, reuşesc acum, după 1–2 exerciţii de învăţare, să rezolve destul de repede şi corect probleme în care sarcina era de a stabili relaţii şi de a efectua operaţii aritmetice simple cu date simbolice de tipul: numere grupate (de fapt, puncte în număr de 3, marcate pe un suport material), desene cu obiecte şi fiinţe, având caracteristici cantitative şi spaţiale diferite şi, în fine, semne algebrice (litere), reprezentând unul sau mai multe numere.

---

[27] V. A. Kruteţkii, *op. cit.*, p. 212-214.

[28] I. V. Dubrovina, *Individualnâie razliciia v sposobnosti k obobşceniiu matematiceskogo i nematematiceskogo materiala v mladşem şkolnom vozraste*, în: V. A. Kruteţkii (red) „Voprosî psihologhii sposobnostei", Moskva, Izd-vo Pedagoghika, 1966, p. 39-40 şi 88-89.

A doua constatare se referă la progresul înregistrat de subiecții cuprinși în cercetare. În momentul de plecare (clasa a II-a), diferențele dintre punctajele/cotele realizate de elevi la probele de simbolizare au fost nesemnificative. După 2 ani (la nivelul clasei a IV-a) acestea nu numai că se adâncesc, dar se observă chiar și o grupare a elevilor: unii care obțin rezultate foarte bune (aproximativ 20% din efectivul total) și alții – cu rezultate nesatisfăcătoare (aproximativ 15% din total). Ținând seama de faptul că în învățarea matematicii fiecare nouă etapă începe, de regulă, cu rezultatele etapei anterioare și se termină cu elaborarea unor modele noi de acțiune, avem toate motivele să presupunem că ascendența dobândită la un moment dat va deveni suport pentru dezvoltarea unor componente aptitudinale specifice.

Interesantă este și evoluția capacității de percepere și reprezentare spațială la școlarii mici. Aceasta apare ca fiind relativ bine dezvoltată în cazul sarcinilor simple (de exemplu, perceperea figurilor plane, bidimensionale) și slab dezvoltată, în sarcinile complexe (perceperea figuri tridimensionale). Cele două aspecte ale capacității de percepere și reprezentare urmează în evoluția lor traiectorii relativ distincte: diferența dintre cotele obținute la probele „figuri plane" și respectiv „figuri în spațiu" este maximă la nivelul clasei a II-a (8 ani), devine moderată/medie la nivelul clasei a V-a (12 ani) și minimă la vârsta adolescenței.

În concluzie, se poate afirma că la școlarii mici (8–11/12 ani), deși nu apare o structură aptitudinală propriu-zisă, anumite manifestări specifice nu pot fi ignorate. Avem în vedere în acest sens diferențele observate în procesul de percepere și generalizare a informației matematice, capacitatea de înțelegere și rezolvare a problemelor neuzuale și cotele de progres realizate prin trecerea de la o etapă la alta a învățării.

B. MANIFESTAREA APTITUDINILOR MATEMATICE LA VÂRSTA ȘCOLARĂ MIJLOCIE (12–16 ANI)

Din punct de vedere al dezvoltării intelectuale, vârsta școlară mijlocie corespunde stadiului operațiilor formale, când copilul devine capabil de a se desprinde de concret și de a situa realul într-un ansamblu de transformări posibile[29]. Este perioada când se pun la un nivel superior problemele conștiinței de sine, când se dezvoltă interesele și se stabilizează aptitudinile speciale ale omului. Cercetări ample asupra aptitudinilor matematice la preadolescenți au efectuat autori ca: V. A. Krutețkii, R. Gullasch, M. Bejat și A. Perju ș.a.

Un prim factor considerat de V.A. Krutețkii ca având un rol esențial în structura aptitudinilor matematice la școlari este capacitatea de percepere formalizată (*formalizovannoe vopriiatie*) a materialului matematic, însușire care se manifestă în procesul perceperii datelor și condițiilor problemei și constă în înțelegerea relativ rapidă și corectă a structurii sale formale. Urmează o serie de

[29] J. Piaget, *Psihologia inteligenței*, București, Edit. Științifică, 1965.

factori sau componente care îşi relevă prezenţa în procesul de prelucrare primară şi secundară a informaţiilor disponibile: generalizarea (imediată, directă, fără comparaţii, adesea pe baza unui singur caz); contragerea raţionamentelor matematice şi a sistemelor de acţiune corespunzătoare; flexibilitatea proceselor cognitive (exprimată în lipsa inerţiei, găsirea de soluţii alternative, absenţa interferenţelor); străduinţa spre claritate, simplitate şi economicitate şi reversibilitatea proceselor gândirii (trecerea la rezolvări inverse, fără efort vizibil şi fără o învăţare prealabilă). Ultimul factor important se relevă în procesul de păstrare/conservare a informaţiei matematice şi constă în: reţinerea structurilor de bază, a principiilor şi schemelor generale de rezolvare şi „uitarea" datelor concrete, a informaţiei de prisos[30].

Un alt autor care a efectuat cercetări asupra gândirii matematice la elevii de vârstă şcolară mijlocie este R. Gullash. Plecând de la ideea că la baza oricărui proces de gândire stau operaţiile de analiză şi sinteză, acesta îşi asumă sarcina de a investiga diferenţele individuale (cognitive) care apar în procesul de rezolvare a problemelor matematice. Sarcinile experimentale au fost astfel alese încât să poată fi puse în evidenţă nivelurile la care se desfăşoară operaţiile de abstractizare, generalizare, reversibilitate şi contragere în procesul de analiză şi sinteză a datelor prezentate. Rezultatele obţinute sunt redate sub forma unei scheme cu şase niveluri, fiecare reprezentând un anumit grad de dezvoltare a indicatorului (funcţiei) urmărit. Subiecţii cu aptitudini matematice superior dezvoltate realizează operaţiile menţionate la nivelurile unu şi doi, adică cele mai înalte, în timp ce elevii cu aptitudini matematice slab dezvoltate nu depăşesc nivelurile medii (3 şi 4) Concluzia: diferenţele dintre grupele de subiecţi comparate sunt date de nivelul la care se desfăşoară operaţiile de abstractizare, generalizare, reversibilitate şi reducţie/condensare, atât în cazul sarcinilor cu conţinut aritmetic sau algebric, cât şi a celor de geometrie[31].

Coroborând datele de mai sus cu cele rezultate din cercetarea proprie[32], putem afirma că vârsta şcolară medie (13–16 ani), este – din perspectiva problemei analizate – perioada în care diferitele componente aptitudinale ating niveluri relativ înalte, când acestea se îmbină şi interacţionează, formând o structură psihică specifică şi armonios dezvoltată.

C. STRUCTURA APTITUDINILOR MATEMATICE LA ELEVII DE VÂRSTĂ ŞCOLARĂ MARE (16–20 ANI)

Perioada pubertăţii fiind încheiată, copilul intră într-o fază evolutivă în care dominante sunt tendinţele de echilibrare, de clarificare a idealurilor şi opţiunilor, de

[30] V. A. Krutetkii, *op. cit.*, p. 246-331.
[31] R. Gullasch, *op. cit.*
[32] I. Berar, *op. cit.*, p. 153-158.

dezvoltare armonioasă a întregii personalități[33]. Se înregistrează acum fenomene legate de diversificarea domeniilor de manifestare a aptitudinilor, inclusiv a celor matematice. Diferitele componente aptitudinale devin mai suple, mai profunde şi mai eficiente.

Analizând particularitățile aptitudinilor matematice la vârsta adolescenței, S. I. Şapiro[34] găseşte câteva aspecte demne de remarcat.

Astfel, în cazul componentei *capacitate de generalizare* autorul stabileşte existența a trei niveluri de manifestare: a) inferior, când generalizarea se produce ca urmare a solicitării venite din partea profesorului; b) mediu, când elevul generalizează ca urmare a unei necesități interne de rezolvare a problemei şi c) superior, când elevul generalizează fără ca rezolvarea problemei să impună o asemenea necesitate. Tocmai acest din urmă nivel, oglindit în tendința de a rezolva fiecare problemă dată în formă generală, caracterizează gândirea matematică superioară.

Componenta denumită *capacitate de contragere* (de condensare, reducere) ia acum forme specifice de genul: a) rezolvarea contrasă nu numai a problemelor cunoscute, ci şi a celor de tip nou; b) absența conştientizării verigilor omise şi c) „dificultăți" în rezolvarea desfăşurată (pas cu pas) a problemelor.

Asociațiile inverse (sau trecerea de la o cale directă la una inversă de rezolvare a problemelor) sunt, de asemenea, caracteristici ale gândirii elevilor cu aptitudini matematice. La aceştia, asociațiile inverse apar, se păstrează şi se actualizează în strânsă legătură cu cele directe. La elevii slabi, dimpotrivă, asociațiile directe şi indirecte par a fi independente una de alta.

Analizând modul în care se îmbină componenta geometrică cu cea analitică în gândirea elevilor, S.I. Şapiro ajunge la concluzia că în cazul celor cu aptitudini ridicate pentru matematică, acesta poate fi definit ca armonios şi adecvat tipului de problemă. Elevii „matematicieni" manifestă o vădită tendință de utilizare a modelelor generale, abstract-simbolice sau trigonometrice. Dimpotrivă, la elevii cu aptitudini reduse pentru matematică se produce o ruptură între componenta geometrică şi cea analitică. Ei recurg cu plăcere la modele geometrice concrete, gândirea lor apare ca fiind de un tip primitiv, intuitiv-concret.

Datele preliminare obținute în cadrul unei cercetări recente proprii demonstrează că la vârsta adolescenței posibilitățile de percepere şi reprezentare spațială continuă să se dezvolte la toate categoriile de elevi. Se amplifică mai ales funcțiile implicate în reprezentarea figurilor tridimensionale. La acest indicator coeficientul de realizare cunoaşte o creştere de 33% pe intervalul de vârstă 15–19 ani.

Se poate, prin urmare, concluziona că diferitele componente care structurează aptitudinile matematice continuă să se dezvolte la vârsta şcolară mare, devenind

---

[33] E. Verza, *Psihologia vârstelor*, Bucureşti, Editura Hyperion, 1993, p. 105-120.

[34] S. I. Şapiro, *Psihologhiceskii analiz strukturî matematiceskih sposobnostei v starşem şkolnom vozraste*, în: V. A. Krutețkii (red.) „Voprosî psihologhii sposobnostei", Moskva, Izd-vo Pedagoghika, 1973, p. 90-129.

mai profunde, mai suple şi mai eficiente. Astfel, generalizarea materialului matematic se produce imediat şi pe planuri multiple, reversibilitatea se manifestă cu egală uşurinţă atât în operaţiile directe, cât şi în cele inverse, contragerea raţionamentelor devine tot mai puţin controlată conştient, reprezentarea spaţială se adânceşte, reuşind să reţină un volum sporit de relaţii ascunse vederii, iar memoria păstrează cu prioritate schemele generale de acţiune, rezolvările tipice şi datele esenţiale.

Încheiem seria de date şi idei referitoare la caracteristicile aptitudinilor matematice cu următoarele concluzii:

a) Ca structură/complex de însuşiri relativ stabile şi totodată dinamice, aptitudinea matematică se bazează pe toate procesele şi calităţile psihice solicitate de activitatea matematică. În constituirea şi manifestarea sa intră nu numai componente cognitive, ci şi afective, motivaţionale şi atitudinale. Specificul structurii depinde atât de calităţile fiecărei componente, cât şi de tipul interacţiunilor dintre acestea, interacţiuni care se produc după „formule" mai mult sau mai puţin strict personalizate.

b) La elevii „matematicieni" aptitudinea matematică: are o pondere însemnată în structura de ansamblu a personalităţii; îndeplineşte roluri centrale şi coordonatoare în procesul de receptare, stocare şi utilizare a informaţiei; imprimă o notă specifică modului de funcţionare a celorlalte substructuri ale personalităţii şi, în fine, imprimă întregii personalităţi un profil predominant matematic.

c) Aptitudinile matematice sunt rezultate ale dezvoltării, ale interacţiunii dintre premisele ereditare şi condiţiile de mediu socio-cultural. Caracterul lor, mai mult sau mai puţin eficient, depinde de modul în care se realizează modelarea potenţialităţilor ereditare (inclusiv cele prenatale) de către factorii ambientali şi, mai ales, de măsura în care subiectul se implică în propria sa devenire.

d) Între conţinutul învăţării şi abilităţile intelective ale copilului există strânse raporturi de condiţionare reciprocă. Acumularea de cunoştinţe, priceperi şi deprinderi duce la dezvoltarea şi transformarea calitativă a schemelor de cunoaştere şi acţiune matematică, iar acestea, la rândul lor, reglează cantitatea şi calitatea achiziţiilor şcolare.

e) O preocupare de larg interes, atât pentru profesori, cât şi pentru elevi, o constituie problema cunoaşterii şi dezvoltării aptitudinilor matematice în activitatea de învăţare şcolară. Metodele mai frecvent folosite în acest scop sunt: evaluările curente (finalizate cu note şcolare), testările periodice efectuate cu probe standardizate (de aptitudini şi cunoştinţe), observaţiile sistematice efectuate de profesorii de specialitate, încurajarea şi stimularea elevilor pentru a participa la diverse cercuri ştiinţifice, concursuri şcolare şi olimpiade, recurgerea la metode şi procedee de lucru inedite, interesante, stimulative pentru dezvoltarea curiozităţii epistemice a elevilor, pentru formarea unor veritabile interese sau chiar pasiuni pentru domeniile matematicii.